

DETERMINAREA STADIULUI DE CEDARE PLASTICĂ A GRINZILOR INFINITE PE MEDIU ELASTIC

Gh. Moraru, A. Taranenco
Universitatea Tehnică a Moldovei

INTRODUCERE

De obicei, la determinarea eforturilor în diferite construcții este folosit modelul liniar elastic de comportare sub acțiunea încărcărilor. Criteriul de stare limită a construcției este dat de condiția ca cea mai mare tensiune (normală, tangențială sau echivalentă) să nu depășească rezistența de calcul a materialului. În baza acestor idei au fost elaborate metodele tradiționale de verificare sau dimensionare a structurilor de rezistență. Dacă construcția este alcătuită din materiale ductile, apariția tensiunilor maxime în careva secțiuni nu întotdeauna conduc la cedarea construcției. Ca rezultat starea limită a construcției va fi alta decât cea considerată în calcul. Prin urmare, starea limită reală a construcției, care corespunde epuizării capacității portante este alta, de obicei, mai mare. Starea limită este atinsă numai după ce careva părți ale construcției suprasolicitate vor trece în stare plastică de comportare a materialului. Evident, că nu se va lua în seamă epuizarea capacității portante provocată de pierderea stabilității locale, oscilații cu amplitudă inadmisibile ș.a. În cele mai multe cazuri de estimare a capacității portante a structurii este folosit modelul de comportare ideal-rigid-plastică, așa numita diagrama lui Prandtl [1, 4].

În limitele acestui model se rezolvă problema determinării încărcării limită a grinzii infinite pe mediu elastic de tip Winkler.

1. GRINDĂ INFINITĂ PE MEDIU ELASTIC DE TIP WINKLER

Se studiază grinda de lungime mare, sollicitată de o sarcină locală, de exemplu, o forță concentrată (fig. 1)

Ecuția diferențială a grinzii pe mediu elastic de tip Winkler are forma [1, 4]

$$EIv^{IV}(x) + cv(x) = q(x), \quad (1)$$

unde $v(x)$ este deplasarea verticală a grinzii, c – coeficientul de tasare (de pat), care depinde de tipul terenului de fundare.

Din motivul că grinda este infinită pentru rezolvarea ecuației (1) poate fi folosită metoda transformării integrale Fourier [2, 5]. Multiplicând ecuația (1) cu $e^{i\alpha x}$ (α - parametrul transformării), integrând pe părți și considerând că funcția $v(x)$ și derivatele sunt nule pentru $x = \pm\infty$ obținem

$$\bar{v}(\alpha) = \frac{\bar{q}(\alpha)}{\alpha^4 + 4\lambda^4}, \quad (2)$$

unde $\lambda = \sqrt[4]{c/EI}$.

$$\begin{aligned} \bar{v}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) e^{i\alpha x} dx, \\ \bar{q}(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) e^{i\alpha x} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Folosind formula de inversare a transformării Fourier, obținem

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{v}(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

2. STARE LIMITĂ A GRINZILOR SOLICITATE DE FORȚE CONCENTRATE

Pentru grinda sollicitată de o forță concentrată F (fig. 1, a) $q(x) = F\delta(x)$, $\bar{q}(\alpha) = F$, $\delta(x)$ – funcția lui Dirac și soluția problemei are forma

$$v(x) = \frac{F}{8\lambda^3 EI} e^{-\lambda|x|} (\cos \lambda x + \sin \lambda|x|).$$

Dacă forța F se mărește treptat se va ajunge la un moment când în secțiunea $x = 0$ a grinzii va apărea o articulație plastică (fig. 1, b) și $M(x) = M_1 = M_{pl}$, unde M_{pl} este momentul

plastic al secțiunii. În grindă sub forță apare prima articulație.

Soluția acestei probleme poate fi obținută prin superpoziție, ca suma a două soluții: prima $v(x)$ provenită din forța F și a doua – $v^*(x)$, provenită din saltul unghiului de rotire a secțiunii în articulație

$$v^*(x) = \frac{\langle \theta \rangle}{4\lambda} e^{-\lambda|x|} (\cos \lambda x - \sin \lambda|x|), \quad (5)$$

unde $\langle \theta \rangle$ este saltul unghiului de rotire al secțiunii grinzii în articulație¹ (fig. 1, b).

Soluția (5) poate fi obținută folosind metoda transformării integrale Fourier conform schemei generalizate [3].

Din condiția $M(0) + M^*(0) = M_{pl}$ obținem relația dintre saltul unghiului de rotire și momentul plastic

$$\langle \theta \rangle = \frac{2M_{pl}}{\lambda EI}.$$

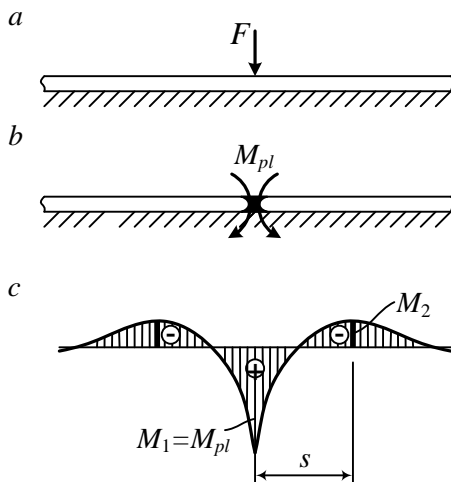


Figura 1. Scheme de calcul și diagrama momentului de încovoiere

La creșterea forței F momentul M_1 rămâne constant și egal cu momentul plastic al secțiunii. Diagrama momentelor $M(x)$ este prezentată în fig. 1, c. Sarcina va crește până când momentul M_2 va fi

egal cu momentul plastic al secțiunii. Coordonata s în care va fi atinsă această valoare se va determina din condiția

$$M(s) = M + M^* = M_{pl}, \quad (6)$$

unde M este momentul provenit din forța F , iar M^* este momentul provenit din M_{pl} din prima articulație. Aceste momente sunt egale

$$M(x) = \frac{F}{4\lambda} e^{-\lambda|x|} (\cos \lambda x - \sin \lambda|x|) \quad (7)$$

$$M^*(x) = -M_{pl} e^{-\lambda|x|} (\cos \lambda x + \sin \lambda|x|), \quad (8)$$

sau

$$M^*(x) = -\langle \theta \rangle \frac{\lambda EI}{2} e^{-\lambda|x|} (\cos \lambda x + \sin \lambda|x|) \quad (9)$$

Realizând condiția (6) obținem pentru s ecuația transcendentă

$$e^{-\lambda s} - \cos \lambda s = 0,$$

cu rădăcina cea mai mică pozitivă $\lambda s_0 = 1,293$.

Substituind această valoare în (6) se poate determina valoarea forței F în momentul apariției articulației a doua

$$F = 14,03\lambda M_{pl},$$

care esențial diferă de valoarea $F = 9,74\lambda M_{pl}$, obținută în [1].

În continuare se prezintă diagrama momentelor de încovoiere raportate la M_{pl} în grinda infinită solicitată de o forță concentrată până la apariția primei articulații plastice (fig. 2, a) și după apariția articulației (fig. 2, b). Introducând notația

$$\gamma = \frac{F}{\lambda M_{pl}}$$

relația pentru $M(x) / M_{pl}$ capătă forma

$$\frac{M(x)}{M_{pl}} = \frac{\gamma}{4} e^{-\lambda|x|} (\cos \lambda x - \sin \lambda|x|);$$

În cazul apariției articulației plastice

$$\frac{M(x)}{M_{pl}} = e^{-\lambda|x|} \left[\cos \lambda x - \left(1 - \frac{\gamma}{2} \right) \sin \lambda|x| \right].$$

¹ Această soluție în [1] este greșită. A.R. Rzhaniczy'n nu folosește noțiunea de salt al unghiului de rotire. Soluția din saltul concentrat al unghiului de rotire a fost folosită de B.G. Korenev. Ea a fost obținută prin diferențierea soluției provenită dintr-o forță concentrată. În [2] a fost propusă o metodă generală de obținere a soluțiilor discontinue.

Diagramele au fost trasate pentru câteva valori arbitrare ale parametrului γ . Este necesar de remarcat că a doua articulație plastică se formează pentru valori ale parametrului γ mai mari de 10.

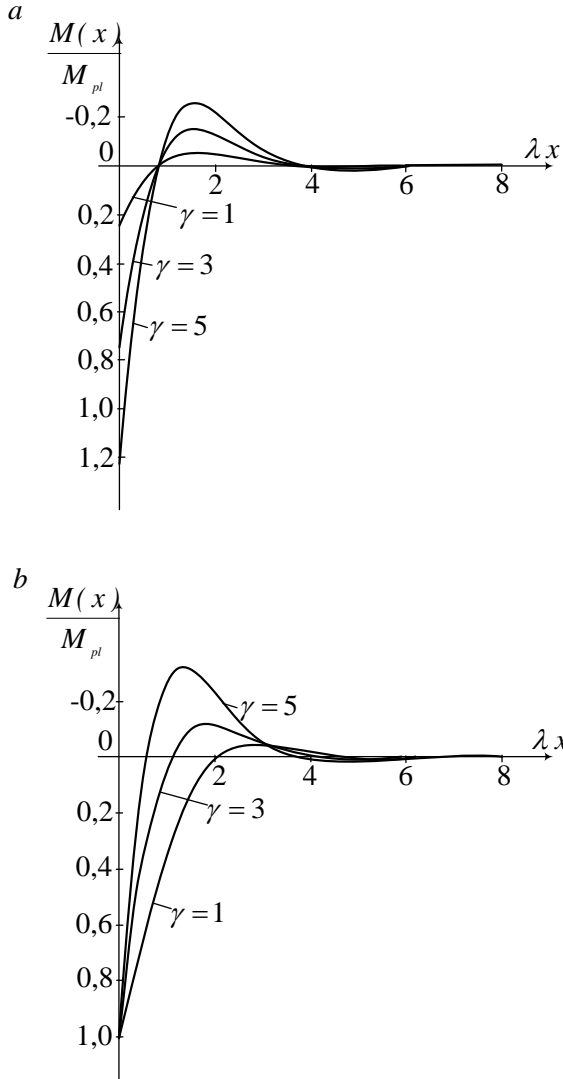


Figura 2. Diagrama momentului de încovoiere până la apariția (a) și după apariția primei articulații (b).

Folosind relațiile de calcul obținute anterior s-a rezolvat problema grinzii infinite solicitată de două forțe F amplasate la distanțe egale de originea sistemului de coordonate (fig. 3, a). Prima fază include calculul grinzii în domeniul elastic de comportare. Momentele de încovoiere se vor obține ca suma soluțiilor provenite din două forțe F care acționează în punctele $x = \pm a/2$, respectiv. Folosind relația (7) și principiul superpoziției putem scrie

$$M(x) = \frac{F}{4\lambda} e^{-\lambda|x+\frac{a}{2}|} \left(\cos \lambda \left(x + \frac{a}{2} \right) - \sin \lambda \left| x + \frac{a}{2} \right| \right) + \frac{F}{4\lambda} e^{-\lambda|x-\frac{a}{2}|} \left(\cos \lambda \left(x - \frac{a}{2} \right) - \sin \lambda \left| x - \frac{a}{2} \right| \right)$$

Faza următoare este caracterizată prin apariția simultană a două articulații plastice în secțiunile $x = \pm a/2$ (fig. 3, b). Ținând seama de relația (9) expresia momentului de încovoiere capătă forma

$$M(x) = \frac{F}{4\lambda} e^{-\lambda|x+\frac{a}{2}|} \left(\cos \lambda \left(x + \frac{a}{2} \right) - \sin \lambda \left| x + \frac{a}{2} \right| \right) + \frac{F}{4\lambda} e^{-\lambda|x-\frac{a}{2}|} \left(\cos \lambda \left(x - \frac{a}{2} \right) - \sin \lambda \left| x - \frac{a}{2} \right| \right) - \langle \theta_1 \rangle \frac{\lambda EI}{2} e^{-\lambda|x+\frac{a}{2}|} \left(\cos \lambda \left(x + \frac{a}{2} \right) + \sin \lambda \left| x + \frac{a}{2} \right| \right) - \langle \theta_2 \rangle \frac{\lambda EI}{2} e^{-\lambda|x-\frac{a}{2}|} \left(\cos \lambda \left(x - \frac{a}{2} \right) + \sin \lambda \left| x - \frac{a}{2} \right| \right)$$

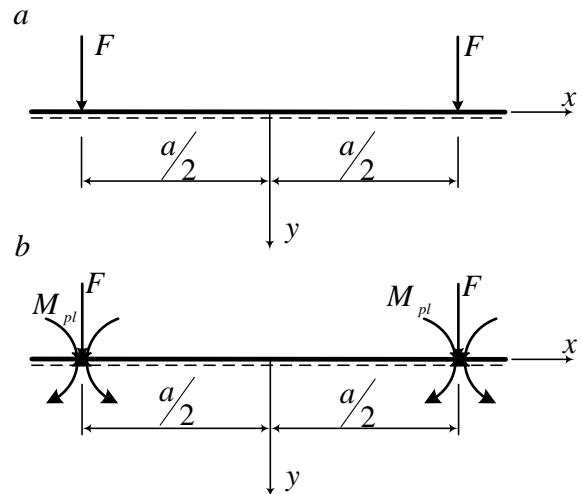


Figura 3. Grindă infinită solicitată de două forțe concentrate: faza elastică (a); faza elastoplastică (b).

Din considerente de simetrie $\langle \theta_1 \rangle = \langle \theta_2 \rangle = \langle \theta \rangle$. Egalând momentele de încovoiere în secțiunile $x = \pm a/2$ cu momentul plastic al secțiunii M_{pl} obținem relația

$$\frac{EI\lambda \langle \theta \rangle}{2} = \frac{F \cdot f^- - 4\lambda M_{pl}}{4\lambda \cdot f^+}, \quad (10)$$

unde $f^+ = 1 + e^{-\lambda a} (\cos \lambda a + \sin \lambda a)$;

$f^- = 1 + e^{-\lambda a} (\cos \lambda a - \sin \lambda a)$.

Relația (10) leagă mărimea saltului unghiului de rotire $\langle \theta \rangle$ cu momentul plastic al secțiunii M_{pl} . Introducând notațiile $\gamma = Fa / M_{pl}$, $\lambda_0 = \lambda a$, și variabila $x = a\bar{x}$, (a – distanța dintre forțe), expresia momentului de încovoiere în domeniul elastic va avea forma

$$\frac{M(a\bar{x})}{M_{pl}} = \frac{\gamma}{4\lambda_0} e^{-\lambda_0|\bar{x}+\frac{1}{2}|} \left(\cos \lambda_0 \left(\bar{x} + \frac{1}{2} \right) - \sin \lambda_0 \left| \bar{x} + \frac{1}{2} \right| \right) + \frac{\gamma}{4\lambda_0} e^{-\lambda_0|\bar{x}-\frac{1}{2}|} \left(\cos \lambda_0 \left(\bar{x} - \frac{1}{2} \right) - \sin \lambda_0 \left| \bar{x} - \frac{1}{2} \right| \right) \quad (11)$$

iar în stadiul elastoplastic

$$\frac{M(a\bar{x})}{M_{pl}} = \frac{\gamma}{4\lambda_0} e^{-\lambda_0|\bar{x}+\frac{1}{2}|} \left(\cos \lambda_0 \left(\bar{x} + \frac{1}{2} \right) - \sin \lambda_0 \left| \bar{x} + \frac{1}{2} \right| \right) + \frac{\gamma}{4\lambda_0} e^{-\lambda_0|\bar{x}-\frac{1}{2}|} \left(\cos \lambda_0 \left(\bar{x} - \frac{1}{2} \right) - \sin \lambda_0 \left| \bar{x} - \frac{1}{2} \right| \right) - \frac{f^- - 4\lambda_0}{4\lambda_0 f^+} e^{-\lambda_0|\bar{x}+\frac{1}{2}|} \left(\cos \lambda_0 \left(\bar{x} + \frac{1}{2} \right) + \sin \lambda_0 \left| \bar{x} + \frac{1}{2} \right| \right) - \frac{f^- - 4\lambda_0}{4\lambda_0 f^+} e^{-\lambda_0|\bar{x}-\frac{1}{2}|} \left(\cos \lambda_0 \left(\bar{x} - \frac{1}{2} \right) + \sin \lambda_0 \left| \bar{x} - \frac{1}{2} \right| \right) \quad (12)$$

În fig. 4 este prezentat raportul M / M_{pl} până la apariția articulațiilor plastice (fig. 4, a) și după apariția lor (fig. 4, b).

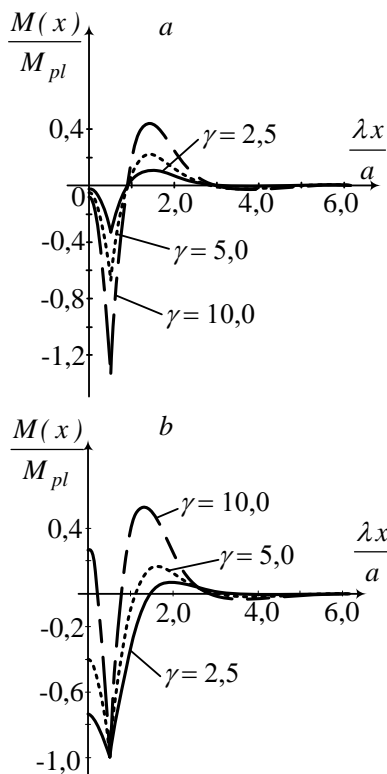


Figura 4. Diagrama momentului M / M_{pl} până la apariția articulațiilor plastice (a) și după – (b).

Relația (12) permite delimitarea domeniului de comportare elastică a grinzii de domeniul de comportare plastică. Pentru aceasta relația (12) s-a egalat cu unitatea. În acest mod se evidențiază valorile parametrilor λ_0 și γ pentru care grinda atinge limita de epuizare a capacității portante (fig.5)

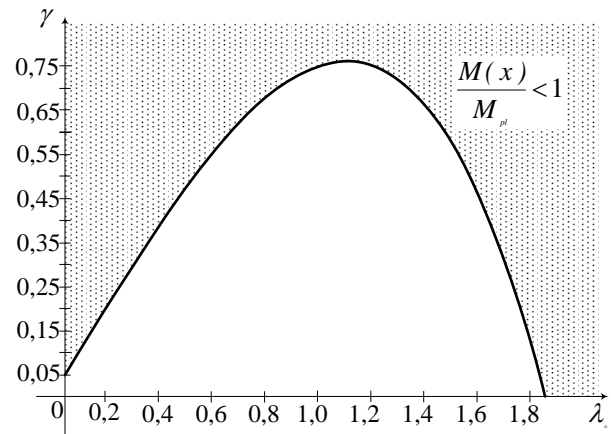


Figura 5. Delimitarea domeniului de comportare în faza elastică și faza elastoplastică.

Se menționează că apariția articulațiilor plastice este însoțită de creșterea tensiunilor de contact dintre grindă și mediu și a deplasărilor verticale. Reieșind din ideile expuse se pot formula și alte criterii limită, cum ar fi, de exemplu, limitarea deplasărilor verticale ale grinzii sau restricții referitoare la mărimea deschiderilor fisurilor în partea întinsă a grinzilor din beton armat.

Bibliografie

1. Rzhaniczy'n A.R. Raschet sooruzhenij s uchetom plasticheskix svojstv materialov// Moskva, Stroivoenmorizdat, 1954.
2. Moraru G.A. Metod razry'vny'x reshenij v mexanike deformiruemy'x tel// Kishinev, Shtiincza, 1990.
3. Popov G.Ya. Koncenztracziya uprugix napryazhenij vozle shtampov, razry'vov, tonkix vklyuchenij i podkreplenij// Moskva, Nauka, 1982.
4. Korenev B.G. Voprosy' rascheta balok i plit na uprugom osnovanii// Moskva, Izdatel'stvo literatury' po stroitel'stvu i arxitekture, 1954.
5. Moraru Gh., Mursa C. Teoria elasticității// Chișinău, Tehnica-Info, 2006.