

PARALELISM ÎNTRE MODELE MATEMATICE ENERGETICE ÎN MECANICA STRUCTURILOR MOBILE

V. A. Aramă (Panțuru)

Universitatea „Dunărea de Jos” din Galați

1. CONSIDERAȚII ASUPRA MODELELOR MATEMATICE

Lanț cinematic desmodrom este lanțul cinematic la care numărul parametrilor corespunzători elementelor conducătoare N_c este egal cu mobilitatea M a structurii. Structură nedesmodromă este structura pentru care numărul de elemente motoare este mai mic decât mobilitatea structurii respective. Se numește lanț cinematic nondesmodrom lanțul cinematic la care $N_c < M$.

În cazul modelelor matematice directe mărimile de intrare sunt mărimile independente cu care poate fi determinată starea unui sistem mobil la fiecare iterație. Ele sunt: constantele sistemului, un număr N_c de parametri de poziție, un număr $N_1 = N_c$ de parametri de viteze și un număr N_F de forțe (și / sau momente).

La sistemele mobile desmodrome $N_c = N_v = M$, iar la sistemele nondesmodrome $N_c = N_v < M$. În cazul modelelor matematice indirecte mărimile de intrare sunt mărimile independente cu care poate fi determinată starea lanțului cinematic la fiecare iterație. Ele sunt: constantele sistemului, un număr M de parametri de poziție, un număr M de parametri de viteze și un număr M de parametri de accelerații, atât la sistemele desmodrome, cât și la cele nondesmodrome, incrementul de timp [1].

Modelele matematice directe pentru determinarea funcțiilor de transmitere ale configurațiilor implică legi de compoziție externe, pe când modelele matematice inverse, numai legi de compoziție interne.

Lanțul cinematic desmodrom poate implica și legi de compoziție externe pentru funcțiile de transmitere ale configurațiilor în modelele matematice indirecte, în cazul în care se fac unele particularizări geometrice.

Simularea mișcării pe calculator a mișcării unui lanț cinematic poate fi realizat în mai multe moduri:

a) Rezolvarea analitică (când este posibil) sau numerică a unui sistem de ecuații diferențiale (metodologia clasică);

b) Calculul cu ajutorul unor algoritmi distincți, numerici [3].

Dacă numărul de forțe de condiționare aplicate sistemului mobil nu este suficient pentru satisfacerea bilanțului ecuațiilor cu al necunoscutelor, este necesar să se introducă alte forțe de condiționare. Pentru stabilitatea mișcării unui lanț cinematic nondesmodrom, câmpul forțelor aplicate trebuie să includă și un număr de forțe de stabilizare a mișcării [2].

Dacă lanțul cinematic real, deformabil, supus unui câmp forțe tridimensional, este înlocuit cu un lanț constituit din elemente rigide, înainte de aplicarea modelelor matematice de calcul, este necesară înlăturarea (convențională) a reacțiunilor redundante.

Funcționarea coerentă (stabilă) a unui sistem mobil nu poate fi argumentată numai pe baza bilanțului între sistemul (determinat) de ecuații și de necunoscute. În vederea corespondenței biunivoce a funcțiilor de transmitere este necesar să fie introduse un număr de forțe de stabilizare (care, eventual, să accepte condițiile funcției V a lui Liapunov). Modele matematice energetice au marele avantaj de a nu necesita calculul explicit al câmpului de accelerații și nici corelația cu calcul cinetostatic. Ele sunt modele matematice bazate pe teorema energiei $\Delta E = L_{i,i+1}$.

2. METODA ENERGETICĂ A PROFESORULUI AMEDEU ORĂNESCU

La aplicarea metodei se folosește procedeul de suprapunere a mișcărilor prin oprirea succesivă a manivelor 1 și 4. Nu există nici o diferență în aplicarea metodei la mecanismele desmodrome sau nondesmodrome [4]. La mecanismele nondesmodrome este necesară o forță de stabilizare a mișcării și în acest caz intervine particularizarea în calcule $M_{m4} = 0$ (1).

Aplicarea metodei energetice în la mecanismele cu mobilitate $M=2$ presupune 2 faze. Se presupun cunoscuți parametrii Cauchy: $\hat{\omega}_1^i, \omega_1^i, \varphi_4^i, \omega_4^i$ și pentru iterația i și trecerea la iterația $i+1$.

⇒ La faza 1 se presupune că elementul 4 este în repaus la unghiul φ_4^i și $\omega_4^i=0$ (2) . Aplicând notațiile simbolice de nivel II vom scrie :

▪ Configurații:

$$[1,2,3,4] \rightarrow [MGC, \varphi_1, \varphi_4]^i \rightarrow [C] \rightarrow [C_1, B, C_2, C, C_3, D, C_4]^i \quad (3)$$

▪ Viteze :

$$[1,2,3,4] \rightarrow \left[\omega_1^i, (\omega_4^i)' = 0 \right]^i \rightarrow \left[\vec{v} \right]^i \rightarrow \left[v_{C_1}, v_{C_2}, v_{C_3}, \omega_2', \omega_3', \omega_3', v_C \right]^i \quad (4)$$

unde accentul “prim” este asociat fazei 1.

- Se calculează unghiul:

$$\varphi_1^{i+1} = \varphi_1^i + \omega_1^i \cdot \Delta t. \quad (5).$$

- Se calculează câmpul fictiv de viteze (notat cu *) cu intrările $\varphi_1^{i+1}, \omega_1$. În acest caz:

$$\omega_1^{i+1} = k'. \quad (6).$$

- Se calculează variația energiei cinetice:

$$2 \cdot \Delta E' = \sum_p \left[m_p \left(\vec{v}_{cp}^i \right)' \cdot \left(k' \cdot \vec{v}_{cp}^* - \left(\vec{v}_{cp}^i \right)' \right) + J_{cp} \left(\omega_p^i \right)' \cdot \left(k' \omega_p^* - \left(\omega_p^i \right)' \right) \right] \quad p = 1,2,3,\dots \quad (7)$$

$$2 \cdot \Delta E' = \sum_p \left[m_p \cdot \left(\left(k' \cdot \vec{v}_{cp}^* \right)^2 - \left(\left(\vec{v}_{cp}^i \right)' \right)^2 \right) + J_{cp} \cdot \left(\left(k' \omega_p^* \right)^2 - \left(\left(\omega_p^i \right)' \right)^2 \right) \right] \quad p = 1,2,3,\dots \quad (8)$$

- Lucrul mecanic al forțelor aplicate se calculează după una din relațiile:

$$L_{i,i+1}' = M_m^i \cdot \omega_1^i + \vec{G}_1 \cdot \vec{v}_{C_1}^i + \vec{G}_2 \cdot \left(\vec{v}_{C_2}^i \right)' \quad \text{sau} \\ + \vec{G}_3 \cdot \left(\vec{v}_{C_3}^i \right)' + \left(\vec{F}^i \right)' \cdot \left(\vec{v}_C \right)' \quad (9)$$

$$L_{i,i+1}' = \frac{1}{2} \left\{ M_m^i \cdot \omega_1^i + \vec{G}_1 \cdot \vec{v}_{C_1}^i + \vec{G}_2 \cdot \left(\vec{v}_{C_2}^i \right)' + \vec{G}_3 \cdot \left(\vec{v}_{C_3}^i \right)' + \left(\vec{F}^i \right)' \cdot \left(\vec{v}_C \right)' \right\} + M_m^{i+1} \cdot k' + \vec{G}_1 \cdot k' \cdot \left(\vec{v}_{C_1}^* \right) + \vec{G}_2 \cdot k' \cdot \left(\vec{v}_{C_2}^* \right) + \vec{G}_3 \cdot k' \cdot \left(\vec{v}_{C_3}^* \right) \quad (10)$$

La acționarea cu motoare de inducție se observă:

$$M_m^{i+1} = f(k'(\omega_1^{i+1})) = f(k') \quad (11)$$

Se determină k' egalând una din relațiile (7) sau (8) cu una din relațiile (9) sau (10). Astfel se determină câmpul de viteze la iterația $i+1$ care împreună cu relația $\varphi_1^{i+1} = \varphi_1^i + \omega_1^i \cdot \Delta t$ (5) servesc la calculul parametrilor Cauchy $\hat{I}\varphi_1^{i+1}, \omega_1^{i+1}, \varphi_4^{i+1}, \omega_4^{i+1}$ Ș pentru iterația $i+1$ și la amorsarea acestei iterații.

⇒ La faza 2 se presupune că elementul 1 este în repaus la unghiul:

$$\varphi_1^i \text{ și } \omega_1^i = 0 \quad (12).$$

Aplicând notațiile simbolice de nivel II vom scrie:

▪ Configurații:

$$[1,2,3,4] \rightarrow [MGC, \varphi_1, \varphi_4]^i \rightarrow [C] \rightarrow [C_1, B, C_2, C, C_3, D, C_4]^i \quad (13)$$

▪ Viteze :

$$[1,2,3,4] \rightarrow \left[\omega_1^i, (\omega_4^i)'' = 0 \right]^i \rightarrow \left[\vec{v}'' \right]^i \rightarrow \left[v_{C_1}'', v_{C_2}'', v_{C_3}'', \omega_2'', \omega_3'', \omega_3'', v_C'' \right]^i \quad (14)$$

- Se calculează unghiul:

$$\varphi_4^{i+1} = \varphi_4^i + \omega_4^i \cdot \Delta t \quad (15).$$

- Se calculează câmpul fictiv de viteze (notat cu *) cu intrările $\varphi_4^{i+1}, \omega_4$ În acest caz:

$$\omega_4^{i+1} = k' \quad (16).$$

- Se calculează variația energiei cinetice:

$$2 \cdot \Delta E'' = \sum_p \left[m_p \left(\overrightarrow{v_{cp}} \right)'' \cdot \left(k'' \cdot \overrightarrow{v_{cp}}^* - \left(\overrightarrow{v_{cp}} \right)'' \right) + J_{cp} \left(\omega_p^i \right)'' \cdot \left(k'' \omega_p^* - \left(\omega_p^i \right)'' \right) \right] \quad \text{sau}$$

$$p = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

$$2 \cdot \Delta E'' = \sum_p \left[m_p \cdot \left(\left(k'' \cdot \overrightarrow{v_{cp}}^* \right)^2 - \left(\left(\overrightarrow{v_{cp}} \right)'' \right)^2 \right) + J_{cp} \cdot \left(\left(k'' \omega_p^* \right)^2 - \left(\left(\omega_p^i \right)'' \right)^2 \right) \right]$$

$$p = 1, 2, 3, \dots \quad (18)$$

- Lucrul mecanic al forțelor aplicate se calculează după una din relațiile:

$$L_{i,i+1}'' = M_m^i \cdot \omega_i^i + \overrightarrow{G}_1 \cdot \overrightarrow{v_{c_1}} + \overrightarrow{G}_2 \cdot \left(\overrightarrow{v_{c_2}} \right)'' + \overrightarrow{G}_3 \cdot \left(\overrightarrow{v_{c_3}} \right)'' + \left(\overrightarrow{F}^i \right)'' \cdot \left(\overrightarrow{v_c} \right)''^i \quad (19)$$

sau

$$L_{i,i+1}'' = \frac{1}{2} \left\{ \left[M_m^i \cdot \omega_i^i + \overrightarrow{G}_1 \cdot \overrightarrow{v_{c_1}} + \overrightarrow{G}_2 \cdot \left(\overrightarrow{v_{c_2}} \right)'' + \overrightarrow{G}_3 \cdot \left(\overrightarrow{v_{c_3}} \right)'' + \left(\overrightarrow{F}^i \right)'' \cdot \left(\overrightarrow{v_c} \right)''^i \right] + M_m^{i+1} \cdot k' + \overrightarrow{G}_1 \cdot k'' \cdot \left(\overrightarrow{v_{c_1}} \right)'' + \overrightarrow{G}_2 \cdot k'' \cdot \left(\overrightarrow{v_{c_2}} \right)'' + \overrightarrow{G}_3 \cdot k'' \cdot \left(\overrightarrow{v_{c_3}} \right)'' \right\} \quad (20)$$

Se determină k' egalând una din relațiile (17) sau (18) cu una din relațiile (19) sau (20). Astfel se determină câmpul de viteze la iterația $i+1$ care împreună cu relația $\varphi_I^{i+1} = \varphi_I^i + \omega_I^i \cdot \Delta t$ (5) servesc la calculul parametrilor Cauchy $\hat{I}\varphi_I^{i+1}$, ω_I^{i+1} , φ_4^{i+1} , ω_4^{i+1} și pentru iterația $i+1$ și la amorsarea acestei iterații. Programul se continuă mai departe cu cele două grupuri de parametrii Cauchy $\hat{I}\varphi_I^{i+1}$, ω_I^{i+1} , φ_4^{i+1} , ω_4^{i+1} și.

Prin sumarea câmpului de viteze în cele două faze obține câmpul de viteze real. Se verifică teorema globală prin sumarea celor doi membri ai teoremei energiei :

$$\Delta E' + \Delta E'' = L_{i,i+1}' + L_{i,i+1}'' \quad (21)$$

Pentru ca verificarea dată de relația (21) să se realizeze este necesar ca funcțiile neliniare de viteze

, ca de exemplu : cuplurile motoare și cuplurile rezistente utile, să fie aplicate numai elementelor de intrare și ieșire (elementele 1 și 4).

Din punct de vedere a erorilor introduse programele de calcul pot fi testate după următoarele criterii:

- Comparația acestui model matematic cu metoda intersectării câmpului de accelerații cu calculul cinetostatic (A∩C) Compararea va avea ca referință verificarea conservării puterilor în sens D'Alembert la mai multe nivele de iterații, aceeași pentru ambele modele matematice. De aceea se vor rula următoarele programe: programul A∩C și programul energetic.

- Programele pot fi realizate:
 - fie pe baza incrementului de unghi

$$\varphi_I^{i+1} = \varphi_I^i + \Delta\varphi \quad (22)$$

și

$$L_{i,i+1} = \mathbf{p}^i \frac{\Delta\varphi}{\omega_i^i} \quad (23)$$

- fie prin intermediul incrementului de timp $\varphi_I^{i+1} = \varphi_I^i + \omega_I^i \Delta t$ (5) și

$$L_{i,i+1} = \mathbf{p}^i \cdot \Delta t \quad (24)$$

Dacă incrementul de unghi $\Delta\varphi$ sau cel de timp Δt sunt suficient de mici atunci erorile relative vor fi mai mici calculându-se pe baza relației (18) decât pe baza relației (17) deoarece diferențele sunt mai mari [4].

3. METODA LUCRULUI MECANIC VIRTUAL

În cazul unui sistem de puncte materiale aflat în repaus și supus la legături ideale (exterioare sau interioare), lucrul mecanic virtual al forțelor date (exterioare sau interioare) este nul.

$$\delta L = \sum \overrightarrow{F}_i \cdot \delta \overrightarrow{r}_i = 0$$

Această relație însă reprezintă o condiție necesară de echilibru. Condiția necesară și suficientă pentru ca un sistem de unctele materiale să se afle în repaus sub acțiunea unui sistem de forțe date exterioare sau interioare este ca lucrul mecanic virtual al acestor forțe să fie nul.

În funcție de proiecțiile pe axe ale forțelor \overrightarrow{F}_i și ale deplasărilor $\delta \mathbf{r}_i$ principiul lucrului mecanic virtual se scrie astfel:

$$\delta L = \sum \overrightarrow{F}_i \cdot \delta \overrightarrow{r}_i = \sum (X_i \cdot \delta x_i + Y_i \cdot \delta y_i + Z_i \cdot \delta z_i) = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \cdot \vec{a}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \cdot \vec{a}_i) \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \cdot \delta q_k &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n (\vec{F}_i - m_i \cdot \vec{a}_i) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] \cdot \delta q_k &= 0 \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^n \mathbf{m}_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \mathbf{q}_k} &= \\ = \sum_{p=1}^n \vec{F}_p \cdot \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \mathbf{q}_k} &\quad (27) \end{aligned}$$

Sistemul de ecuații anterior devine , în cazul unui lanț cinematic constituit din rigide:

$$\begin{aligned} \sum \left(m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial q_k} + J_p \frac{d\omega_p}{dt} \cdot \frac{\partial \varphi_p}{\partial q_k} \right) &= \\ = \sum_{p=1}^n \left(\vec{F}_p \cdot \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial q_k} + M_p \frac{\partial \varphi_p}{\partial q_k} \right) &\quad (28) \end{aligned}$$

în care:

n este numărul elementelor mobile;

\vec{v} - viteza centrului de masă a elementului

\vec{v}_p = p al lanțului cinematic

M - mobilitatea sistemului; $M = k$;

\mathbf{q}_k = coordonatele generalizate în număr egal cu mobilitatea ($M = k$) sistemului ;

forțele efectiv aplicate;

M_p - cuplurile efectiv aplicate;

φ_p - unghiurile de rotație a corurilor în jurul centrului maselor.

Scrisă în diferențe finite relația relația anterioară devine

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \cdot \sum \left[\mathbf{m}_p \left(\vec{v}_p^{i+1} - \vec{v}_p^i \right) \frac{\partial \vec{r}_p^i}{\partial \mathbf{q}_k} + \right. \\ \left. + J_p \left(\omega_p^{i+1} - \omega_p^i \right) \frac{\partial \varphi_p^i}{\partial \mathbf{q}_k} \right] = \mathbf{Q}_k^i \quad (29) \end{aligned}$$

în care s-a notat Q_k^i forța generalizată (aplicată), iar i este ordinul iterației.

În cazul unui pentagon articulată, cu mobilitatea $M=2$ și având coordonatele generalizate : $q_1 = \varphi_1$, $q_4 = \varphi_4$.

Observații :

Vitezele \vec{v}_p și ω_p^i se calculează prin sumarea a 2 câmpuri

și \vec{v}_p calculat cu ω_4^i și $\omega_1^i = 0$

.

\vec{v}_p calculat cu ω_1^i și $\omega_4^i = 0$

Vitezele \vec{v}_p și ω_p^{i+1} se calculează la fel, prin sumarea celor 2 câmpuri, dar se remarcă faptul că ele nu sunt încă cunoscute.

Aceste viteze exprimate sub forma unui scalar k , care înmulțește o viteză fictivă (notată cu*), calculată cu intrările φ_1^{i+1} și cu ω_1^i , φ_4^{i+1} și cu ω_4^i .

Se calculează :

$$\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \varphi_1^i} = \frac{\vec{v}_p^i}{\omega_1^i}, \quad \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \varphi_4^i} = \frac{\vec{v}_p^i}{\omega_4^i}, \quad (30)$$

$$\frac{\partial \varphi_p^i}{\partial \varphi_1^i} = \frac{\omega_p^i}{\omega_1^i}, \quad \frac{\partial \varphi_p^i}{\partial \varphi_4^i} = \frac{\omega_p^i}{\omega_4^i}$$

Astfel încât se obțin :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{p=1}^4 \mathbf{m}_p \left(\mathbf{k}' \vec{v}_p^{i*} - \vec{v}_p^i + \mathbf{k}'' \vec{v}_p^{i*} - \vec{v}_p^{i*} \right) \frac{\vec{v}_p^i}{\omega_4^i} + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^n J_p \left(\mathbf{k}' \omega_p^{i*} - \omega_p^i + \mathbf{k}'' \omega_p^{i*} - \omega_p^{i*} \right) \frac{\omega_p^i}{\omega_4^i} \right] = \\ = \frac{1}{\omega_4^i} \left(\vec{G}_2 \cdot \vec{v}_2 + \vec{G}_3 \cdot \vec{v}_3 + \dots + M \mathbf{m}_4^i \cdot \omega_4 + M \mathbf{u}^i \cdot \omega_u^i + \vec{G}_4^i \right) \\ \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{p=1}^4 \mathbf{m}_p \left(\mathbf{k}' \vec{v}_p^{i*} - \vec{v}_p^i + \mathbf{k}'' \vec{v}_p^{i*} - \vec{v}_p^{i*} \right) \frac{\vec{v}_p^i}{\omega_1^i} + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^n J_p \left(\mathbf{k}' \omega_p^{i*} - \omega_p^i + \mathbf{k}'' \omega_p^{i*} - \omega_p^{i*} \right) \frac{\omega_p^i}{\omega_1^i} \right] = \\ = \frac{1}{\omega_1^i} \left(\vec{G}_1 \cdot \vec{v}_1 + \vec{G}_2 \cdot \vec{v}_2 + \vec{G}_3 \cdot \vec{v}_3 + \dots + M \mathbf{m}_1^i \cdot \omega_1^i \right) \quad (31) \end{aligned}$$

Sistemul de ecuații 31 se aplică astfel:

a. Se pornește calculul cu parametrii Cauchy la iterația i , adică cu $\varphi_1^i, \varphi_4^i, \omega_1^i, \omega_4^i$, alegându-se un increment de timp Δt . Cu acești parametri se calculează parametrii : $\varphi_1^{i+1}, \varphi_4^{i+1}$.

b. Se calculează un câmp de viteze , notat cu „prim „ (‘), cu intrările φ_l^i , ω_l^i și elementul 4 oprit .

c. Se calculează un câmp de viteze , notat cu „secund „ (’), cu intrările φ_l^i , ω_l^i și elementul 1 oprit.

d. Se calculează un câmp de viteze fictiv , notat cu „asterics „ (*), φ_l^{i+1} , ω_l^i și elementul 4 oprit .

e. Se calculează un câmp de viteze fictiv , notat cu „asterics „ (*), φ_l^{i+1} , ω_l^i și elementul 1 oprit .

f. Se fac apoi înlocuirie în cele două ecuații (31) și prin rezolvarea sistemului se calculează k’ și k’’. Valorile obținute se înlocuiesc și se amorsează astfel iterația $i+1$.

pour la simulation du mouvement des structures des rigides, The Annual Symposium of the Institute of Solid Mechanics, SISOM ,2002, Bucharest, pp.39-46.

4. CONCLUZII ȘI RECOMANDĂRI

➤ Nu exista nici o diferență în aplicarea metodelor la mecanismele desmodrome sau nondesmodrome .

➤ La mecanismele nondesmodrome este necesară o forță de stabilizare a mișcării și în acest caz intervine particularizarea în calcule $M_{m4}=0$.

➤ Din punct de vedere a erorilor introduse programele de calcul pot fi testate după următoarul criteriu comparația modelului matematic energetic cu metoda intersectării câmpului de accelerații cu calculul cinetostatic($A \cap C$).

➤ Compararea va avea ca referință verificarea conservării puterilor în sens D’Alembert la mai multe nivele de iterații , aceeași pentru ambele modele matematice. De aceea se vor rula următoarele programe: programul $A \cap C$ și programul energetic .

Bibliografie

1. **Oranescu A., Mereuță E., Tocariu L., Munteanu V., Bega M., Necula P.** *Dynamic functions and structures* , Tenth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Oulu, Finland, 20-24 iunie, 1999, pag. 2649-2654, vol.7
2. **Mereuță E.** *Metode de optimizare a structurilor mecanice folosite pentru manevrarea capacelor gurilor de magazie, Simpozionul Stiintific Internațional, Petroșani 2000, pag 339.*
3. **Mereuță E.** *Abstract Algebra Structures Regarding the mathematical models for Kinematic Chains, The Annals of “Dunărea de Jos” University, Fascicle X Applied Mechanics 1999, pag. 51-54.*
4. **Orănescu A., Mereuță E., Munteanu V.** *L’opportunité des ordinateurs specialises, portables*

Recomandat spre publicare: 06.12.2007.